

X. Vektorové prostory

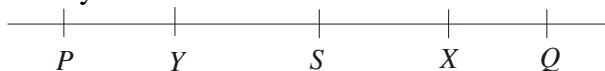
§1. Vektorový prostor vázaných vektorů

Pozn.: V tomto paragrafu ukážeme všechny podstatné vlastnosti vektorů na jednom z jejich možných modelů – na množině orientovaných úseček s pevným počátečním bodem a zformulujeme definici vektorového prostoru. V dalších paragrafech pak ukážeme jiné modely vektorových prostorů.

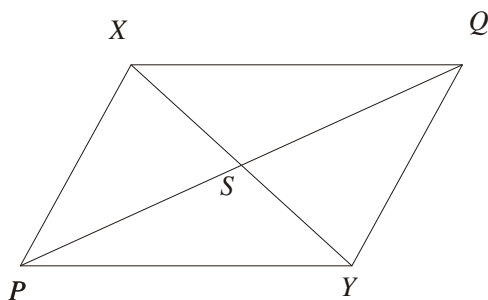
Def.: Necht' $P \in E_3$ je libovolný pevný bod, ke každému bodu $X \in E_3$ přiřadíme orientovanou úsečku $\overrightarrow{PX}$ (P je počáteční bod, X je koncový bod této úsečky). Množinu všech těchto úseček označíme U (resp. U_3) a nazveme množinou všech orientovaných úseček s počátečním bodem P (nebo množinou všech vázaných vektorů s počátečním bodem P).

Pozn.: Je-li $X=P$, jde o úsečku $\overrightarrow{PP}$, u níž počáteční a koncový bod splývají.

Def.: a) Necht' $P, X, Q, Y \in E_3$ jsou 4 kolineární body, řekneme, že body P, X, Q, Y tvoří vrcholy degenerovaného rovnoběžníku, jestliže střed úsečky PQ se rovná středu úsečky XY .



b) Necht' $P, X, Q, Y \in E_3$ jsou 4 libovolné body, řekneme, že body P, X, Q, Y tvoří vrcholy zobecněného rovnoběžníku, jestliže střed úsečky PQ se rovná středu úsečky XY .



Def.: Na množině U všech orientovaných úseček s pevným počátečním bodem $P \in E_3$ definujeme operaci sčítání takto: $\forall \overrightarrow{PX}, \overrightarrow{PY} \in U: \overrightarrow{PX} + \overrightarrow{PY} = \overrightarrow{PQ}$, je-li bod $Q \in E_3$ vrcholem zobecněného rovnoběžníku $PXQY$.

Pozn.: Je tedy sčítání orientovaných úseček operace na množině U , tzn. zobrazení $\oplus: U \times U \rightarrow U$.

V.1.1.: Operace sčítání na množině U má následující vlastnosti:

1. $\forall \overrightarrow{PX}, \overrightarrow{PY} \in U: \overrightarrow{PX} + \overrightarrow{PY} = \overrightarrow{PY} + \overrightarrow{PX}$ (K-komutativnost)
2. $\forall \overrightarrow{PX}, \overrightarrow{PY}, \overrightarrow{PZ} \in U: (\overrightarrow{PX} + \overrightarrow{PY}) + \overrightarrow{PZ} = \overrightarrow{PX} + (\overrightarrow{PY} + \overrightarrow{PZ})$ (A-asociativnost)

3. $\exists \overrightarrow{PP} \in U : \forall \overrightarrow{PX} \in U : \overrightarrow{PX} + \overrightarrow{PP} = \overrightarrow{PP} + \overrightarrow{PX} = \overrightarrow{PX}$ (N-existence neutrálního prvku)
4. $\forall \overrightarrow{PX} \in U : \exists \overrightarrow{PY} \in U : \overrightarrow{PX} + \overrightarrow{PY} = \overrightarrow{PY} + \overrightarrow{PX} = \overrightarrow{PP}$ (I-existence inverzního prvku ke každému prvku)

Pozn.: Vyhovuje-li množina U uzavřenosti a všem 4 axiomům z předchozí věty, nazývá se množina U vzhledem k operaci $\oplus$ komutativní (abelovskou) grupou a značíme ji $(U+)$ (grupa je tedy struktura s 1 operací, která splňuje 4 podmínky – uzavřenost a podmínky 2.-4.).
Pokud je splněna pouze uzavřenost, mluvíme o grupoidu $(U+)$.

Def.: Na množině U všech orientovaných úseček s pevným počátečním bodem $P \in E_3$ definujeme operaci násobení orientovaných úseček reálným číslem (tzv. vnější násobení na množině U) takto: je-li $p \in \mathbf{R}$ a $\overrightarrow{PX} \in U$, pak p -násobkem orientované úsečky $\overrightarrow{PX}$ nazveme orientovanou úsečku $\overrightarrow{PY}$ (zapisujeme $\overrightarrow{PY} = p \cdot \overrightarrow{PX}$), přičemž platí:

1. $p = 0 \Rightarrow Y = P$
2. $p \neq 0 \Rightarrow Y = H_{p,p}(X)$

Pozn.: Vnější násobení orientovaných úseček $\otimes$ tedy je zobrazení $\mathbf{R} \times U \rightarrow U$.

V.1.2.: Vnější násobení na množině U má následující vlastnosti:

$\forall p, q \in \mathbf{R}, \forall \overrightarrow{PX}, \overrightarrow{PY} \in U$:

1. $p \cdot (\overrightarrow{PX} + \overrightarrow{PY}) = p \cdot \overrightarrow{PX} + p \cdot \overrightarrow{PY}$
2. $(p + q) \cdot \overrightarrow{PX} = p \cdot \overrightarrow{PX} + q \cdot \overrightarrow{PX}$
3. $(p \cdot q) \cdot \overrightarrow{PX} = p \cdot (q \cdot \overrightarrow{PX})$
4. $1 \cdot \overrightarrow{PX} = \overrightarrow{PX}$

§2. Definice vektorového prostoru

Def.: Necht' V je množina, jejíž prvky označíme např. $\vec{u}, \vec{v}, \dots$. Necht' je na množině V definována operace sčítání ($\forall \vec{u}, \vec{v} \in V : \vec{u} + \vec{v} \in V$) a vnější násobení reálným číslem ($\forall p \in \mathbf{R}, \forall \vec{u} \in V : p \cdot \vec{u} \in V$). Pak tuto množinu nazveme vektorovým prostorem (nad množinou $\mathbf{R}$) a její prvky vektory, jestliže platí:

$\forall p, q \in \mathbf{R}, \forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$:

1. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
2. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
3. $\exists \vec{o} \in V, \forall \vec{u} \in V : \vec{u} + \vec{o} = \vec{o} + \vec{u} = \vec{u}$
4. $\forall \vec{u} \in V : \exists (-\vec{u}) \in V : \vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{o}$

$$5. p \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = p \cdot \vec{u} + p \cdot \vec{v}$$

$$6. (p + q) \cdot \vec{u} = p \cdot \vec{u} + q \cdot \vec{u}$$

$$7. (p \cdot q) \cdot \vec{u} = p \cdot (q \cdot \vec{u})$$

$$8. 1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$$

Vektor $\vec{o}$ z 3. nazýváme nulovým vektorem, vektor $(-\vec{u})$ ze 4. nazýváme vektorem opačným k vektoru $\vec{u}$.

V.2.1.: Nechť V je vektorový prostor, pak platí:

a) $\exists! \vec{o} \in V$, kde $\vec{o}$ je nulový vektor

b) $\forall \vec{u} \in V : \exists! (-\vec{u}) \in V$

c) $\forall \vec{u} \in V : 0 \cdot \vec{u} = \vec{o}$

d) $\forall \vec{u} \in V : (-1) \cdot \vec{u} = (-\vec{u})$

e) $\forall p \in \mathbf{R} : p \cdot \vec{o} = \vec{o}$

f) $\forall p \in \mathbf{R}, \forall \vec{u} \in V : p \cdot \vec{u} = \vec{o} \Leftrightarrow p = 0 \vee \vec{u} = \vec{o}$

Pozn.: Nechť U je množina všech orientovaných úseček s pevným počátečním bodem $P \in E_3$, pak podle výsledku §1 je tato množina vektorovým prostorem, který nazveme vektorový prostor vázaných vektorů v prostoru a budeme jej označovat U_3 , jeho prvky nazveme vázanými vektory.

Provedeme-li analogickou konstrukci v E_2 , získáme vektorový prostor vázaných vektorů v rovině U_2 . Analogicky na přímce získáme prostor U_1 .

Př.!: Na množině $\mathbf{R}^{(2)} = \{[x, y], x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$ všech uspořádaných dvojic $\mathbf{R}$ čísel definujeme operaci sčítání a vnější násobení takto:

$$\forall \vec{u}_1 = [x_1, y_1], \vec{u}_1 \in \mathbf{R}^{(2)}, \forall \vec{u}_2 = [x_2, y_2], \vec{u}_2 \in \mathbf{R}^{(2)} \Rightarrow \vec{u}_1 \oplus \vec{u}_2 = [x_1 + x_2, y_1 + y_2] \in \mathbf{R}^{(2)};$$

$$\forall p \in \mathbf{R}: p \cdot \vec{u}_1 = [p \cdot x_1, p \cdot y_1] \in \mathbf{R}^{(2)}.$$

Dokažte, že takto definovaná struktura je vektorovým prostorem.

Pozn.: Analogicky můžeme dokázat, že množina všech uspořádaných n -tic reálných čísel $\mathbf{R}^{(n)} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n), x_i \in \mathbf{R}, i \in \{1, 2, \dots, n\}\}$ tvoří vzhledem k analogicky definovaným operacím sčítání a vnější násobení

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

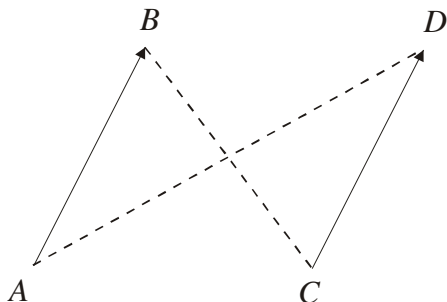
$$p \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) = (p \cdot x_1, p \cdot x_2, \dots, p \cdot x_n)$$

vektorový prostor, který nazveme vektorový prostor uspořádaných n -tic reálných čísel (=aritmetický vektorový prostor $\mathbf{R}^{(n)}$).

§3. Geometrický model vektorového prostoru

Pozn.: Nyní zobecníme úvahy z §1 a vytvoříme model vektorového prostoru užitečný zejména v analytické geometrii.

Def.: Necht' $A, B, C, D \in E_3$ jsou body. Řekneme, že orientované úsečky $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{CD}$ jsou ekvipolentní, jestliže střed úsečky AD je i středem úsečky CB , a zapisujeme $\overrightarrow{AB} \varepsilon \overrightarrow{CD}$.



Pozn.: Z definice je zřejmé, že navzájem ekvipolentní orientované úsečky jsou stejně dlouhé, rovnoběžné a souhlasně orientované, body A, B, C, D tvoří vrcholy zobecněného rovnoběžníku.

Pozn.: ε je relace na množině všech orientovaných úseček, která má vlastnosti popsané v následující větě:

V.3.1.: $\forall \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{EF} \subseteq E_3$:

1. $\overrightarrow{AB} \varepsilon \overrightarrow{AB}$ (R)
2. $\overrightarrow{AB} \varepsilon \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{CD} \varepsilon \overrightarrow{AB}$ (S)
3. $\overrightarrow{AB} \varepsilon \overrightarrow{CD} \wedge \overrightarrow{CD} \varepsilon \overrightarrow{EF} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \varepsilon \overrightarrow{EF}$ (T)

Pozn.!: Relace ε , která má vlastnosti R, resp. S, resp. T z předchozí věty, se nazývá reflexivní, resp. symetrická, resp. tranzitivní.

Má-li nějaká relace všechny 3 uvedené vlastnosti zároveň, nazývá se relace ekvivalence.

Ke každé ekvivalenci existuje rozklad na tzv. třídy rozkladu.

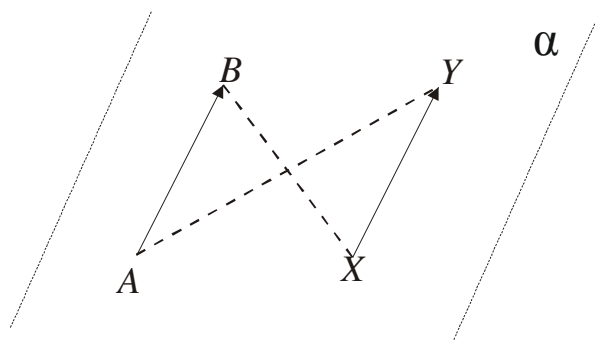
Množina všech orientovaných úseček se rozkládá na třídy – jisté význačné podmnožiny, přitom v téže třídě rozkladu leží všechny navzájem ekvipolentní úsečky. Tyto třídy mají následující vlastnosti:

1. jsou po dvou disjunktní
2. sjednocení všech těchto tříd vytváří celou množinu orientovaných úseček.

Def.: Necht' M je množina všech orientovaných úseček v E_3 a necht' $\varepsilon \subseteq M \times M$ je relace ekvipolence. Pak třídu rozkladu množiny M , který přísluší relaci ε , nazveme volným vektorem.

Def.: Necht' $\vec{u} \subseteq M$ je libovolný volný vektor a $\overrightarrow{AB} \in \vec{u}$ orientovaná úsečka, tedy $\vec{u} = \{\overrightarrow{XY} : \overrightarrow{XY} \varepsilon \overrightarrow{AB}\}$. Pak orientovanou úsečku $\overrightarrow{AB}$ nazveme umístěním vektoru $\vec{u}$.

V.3.2.: Necht' $\overrightarrow{AB} \in M$ je orientovaná úsečka, $X \in E_3$ libovolný bod, pak $\exists! Y \in E_3 : \overrightarrow{AB} \varepsilon \overrightarrow{XY}$.



Def.: Necht' V je množina všech volných vektorů v E_3 . Pak na množině V definujeme operace sčítání a vnější násobení takto:

1. $\forall \vec{u}, \vec{v} \subseteq V : \vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$, kde $\vec{w} = \{\overrightarrow{XY} : \overrightarrow{XY} \varepsilon \overrightarrow{PC}\}$, přitom $\overrightarrow{PA} \in \vec{u}, \overrightarrow{PB} \in \vec{v}$ a $\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}$ je součet orientovaných úseček $\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}$ definovaný na množině U , tzn. bod C je čtvrtým vrcholem zobecněného rovnoběžníku $PACB$.

2. $\forall p \in \mathbf{R}, \forall \vec{u} \subseteq V : p \cdot \vec{u} = \vec{z}$, kde $\vec{z} = \{\overrightarrow{XY} : \overrightarrow{XY} \varepsilon \overrightarrow{PF}\}$, přitom $\overrightarrow{PE} \in \vec{u}$ a $\overrightarrow{PF} = p \cdot \overrightarrow{PE}$ je vnější součin orientované úsečky $\overrightarrow{PE}$ a čísla p definovaný na množině U , tzn. pomocí stejnolehlosti se středem P a koeficientem p .

Def.: Pokud $\overrightarrow{PA} \in \vec{u}$, nazýváme orientovanou úsečku $\overrightarrow{PA}$ též reprezentantem vektoru $\vec{u}$.

V.3.3.: Operace $\oplus, \otimes$ definované na množině V nezávisejí na výběru reprezentantů.

V.3.4.: Množina V všech volných vektorů v E_3 s výše definovanými operacemi sčítání vektorů a vnějšího násobení tvoří vektorový prostor nad množinou $\mathbf{R}$.

[Dk.: Plyne z toho, že operace $\oplus, \otimes$ jsou definovány pomocí operací na množině U , která je sama vektorovým prostorem $\Rightarrow$ všechny podmínky 1-8 z definice jsou splněny.]

Pozn.: Vektorový prostor V všech volných vektorů v E_3 nazveme vektorovým prostorem volných vektorů v prostoru a budeme jej označovat V_3 . Analogicky v rovině a na přímce získáme vektorové prostory V_2 a V_1 .

§4. Podprostory vektorového prostoru

Def.: Necht' V je vektorový prostor, $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k \in V$ vektory, $p_1, p_2, \dots, p_k \in \mathbf{R}$. Vektor $\vec{x} = p_1 \vec{u}_1 + p_2 \vec{u}_2 + \dots + p_k \vec{u}_k = \sum_{i=1}^k p_i \vec{u}_i$ nazýváme lineární kombinací vektorů $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$. Reálná čísla $p_1, p_2, \dots, p_k$ nazýváme koefficienty lineární kombinace. Lineární kombinaci, v níž $p_1 = p_2 = \dots = p_k = 0$, tedy $\vec{x} = \vec{o}$, nazýváme triviální lineární kombinací.

Pozn.: Předchozí definice je korektní, neboť je zřejmé, že $\vec{x} \in V$.

Def.: Podmnožinu W vektorového prostoru V nazýváme podprostorem vektorového prostoru V právě tehdy, když W je vektorovým prostorem vzhledem k operacím sčítání a vnější násobení definovaným ve V .

V.4.1.: Neprázdná podmnožina W je podprostorem vektorového prostoru V právě tehdy, když platí:

1. $\forall \vec{u}, \vec{v} \in W : \vec{u} + \vec{v} \in W$
2. $\forall p \in \mathbf{R}, \forall \vec{u} \in W : p \cdot \vec{u} \in W$

Pozn.: Je-li V vektorový prostor, pak má vždy alespoň 2 podprostory: sebe sama a tzv. triviální vektorový podprostor obsahující jediný nulový vektor.

V.4.2.: Necht' S je podmnožina vektorového prostoru V . Pak množina $\langle S \rangle$ všech lineárních kombinací vektorů množiny S je podprostorem V .

Def.: Necht' $S \subseteq V$ je podmnožina vektorového prostoru V . Podprostor $\langle S \rangle$ všech lineárních kombinací vektorů množiny S nazýváme podprostorem generovaným množinou S nebo lineárním obalem množiny S . Množinu S nazýváme systémem generátorů (množinou generátorů) podprostoru $\langle S \rangle$.

§5. Lineární závislost a nezávislost

Def.: Necht' $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k\}$ je konečná množina vektorů vektorového prostoru V . Řekneme, že množina vektorů S je:

- a) lineárně nezávislá, jestliže platí:
$$p_1 \cdot \vec{u}_1 + p_2 \cdot \vec{u}_2 + \dots + p_k \cdot \vec{u}_k = \vec{o} \Leftrightarrow p_1 = p_2 = \dots = p_k = 0$$
- b) lineárně závislá, jestliže platí:
$$\exists p_i \neq 0 : p_1 \cdot \vec{u}_1 + p_2 \cdot \vec{u}_2 + \dots + p_k \cdot \vec{u}_k = \vec{o} \quad (i \in \{1, 2, \dots, k\})$$

Pozn.: Často stručně hovoříme o lineární závislosti, resp. nezávislosti vektorů.

V.5.1.: a) Obsahuje-li množina vektorů S (z předchozí definice) $\vec{o}$, pak je lineárně závislá
b) Když $S = \{\vec{u}\}$, pak S je závislá $\Leftrightarrow \vec{u} = \vec{o}$.

V.5.2.: Kritérium lineární závislosti:

Vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$ jsou lineárně závislé právě tehdy, když alespoň 1 z nich lze vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních.

Pozn.: Ne každý z lineárně závislých vektorů může být vyjádřen jako lineární kombinace ostatních. Zvolme např. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ tak, že $\vec{a}, \vec{b}$ jsou lineárně nezávislé a $\vec{c} = 2\vec{a}$, pak platí $\vec{0} = (-2) \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} + 1 \cdot \vec{c} \Rightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ jsou lineárně závislé, ale $\vec{b}$ nelze vyjádřit pomocí $\vec{a}, \vec{c}$.

Pozn.: Necht' $\vec{a}, \vec{b} \in V$ a $\vec{a}, \vec{b}$ jsou závislé $\Rightarrow \vec{a} = k \cdot \vec{b}$, pak v geometrickém modelu jde o rovnoběžné vektory.

§6. Báze a dimenze vektorového prostoru

Def.: Necht' $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k)$ je konečná posloupnost vektorů vektorového prostoru V . Řekneme, že tato posloupnost vektorů tvoří bázi vektorového prostoru V , jestliže platí:

1. vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$ jsou generátory prostoru V
2. vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$ jsou lineárně nezávislé.

Pozn.: a) Konečná posloupnost vektorů je uspořádanou k -ticí těchto vektorů, je tedy podstatné, v jakém pořadí jsou vektory zapsány.
b) Někteří autoři bázi rozumí (neuspořádanou) množinu vektorů s podmínkami 1 a 2 z předchozí definice.

Pozn.: a) Báze vektorového prostoru neobsahuje nulový vektor.
b) Vektorový prostor $V = \{\vec{0}\}$ žádnou bázi nemá.
c) Ve vyšší matematice se studují též vektorové prostory s nekonečnou bází.

V.6.1.: Necht' $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k)$ je báze vektorového prostoru V .

Pak ke každému vektoru $\vec{x} \in V \exists!$ k -tice $\mathbf{R}$ čísel $x_1, x_2, \dots, x_k$ tak, že
$$\vec{x} = x_1 \cdot \vec{e}_1 + x_2 \cdot \vec{e}_2 + \dots + x_k \cdot \vec{e}_k$$

Pozn.: Dá se dokázat, že platí:
Má-li vektorový prostor V nad množinou $\mathbf{R}$ nějakou bázi, pak má těchto bází nekonečně mnoho, ovšem všechny tyto báze obsahují stejný počet vektorů.

Def.: Necht' $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k)$ je báze vektorového prostoru V . Pak číslo k nazýváme dimenzí vektorového prostoru V a píšeme $\dim V = k$. Pokud $V = \{\vec{0}\} \Rightarrow \dim V = 0$.

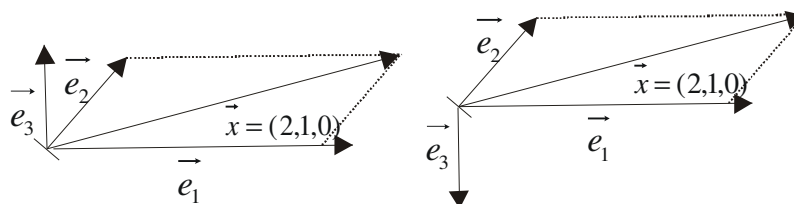
Pozn.: Předchozí definice je vzhledem k minulé poznámce korektní, neboť v případě, že vektorový prostor V má několik bází, mají všechny stejný počet vektorů.

§7. Souřadnice, soustava souřadnic

Def.: Necht' $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ je báze (1) vektorového prostoru V . Necht' $\vec{x} \in V$ je lib. vektor takový, že $\vec{x} = x_1 \cdot \vec{e}_1 + x_2 \cdot \vec{e}_2 + \dots + x_n \cdot \vec{e}_n$, kde $x_i \in \mathbf{R}$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Pak uspořádanou n -tici $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nazýváme souřadnicemi vektoru $\vec{x}$ v bázi (1) a píšeme $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)_{(1)}$ nebo $\vec{x} (x_1, x_2, \dots, x_n)_{(1)}$.

Pozn.: a) Každý vektor má v dané bázi právě jedny souřadnice (důsledek V.6.1.).

b) Jeden a týž vektor má zpravidla v různých bázích různé souřadnice (protipříklad – různé báze, stejný vektor, stejné souřadnice)



(proto se označení báze zapisuje k souřadnicím vektoru).

c) Pokud není u souřadnic vektoru označená báze, tzn. je-li vektor $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^{(n)}$, lze čísla x_i považovat přímo za jeho souřadnice v základní bázi $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$, kde $\vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, ..., $\vec{e}_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$.

V.7.1.: Necht' $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ je báze (1) VP V . Necht' $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)_{(1)}$, $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)_{(1)}$ jsou dva lib. vektory z V a necht' $p \in \mathbf{R}$. Pak $\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)_{(1)}$ a $p \cdot \vec{x} = (p \cdot x_1, p \cdot x_2, \dots, p \cdot x_n)_{(1)}$

Pozn.!: Necht' $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ je báze (1) vektorového prostoru V . Definujeme zobrazení $\varphi: V_n \rightarrow \mathbf{R}^{(n)}$ takto:
 (φ je tedy zobrazení lib. VP dimenze n do aritmetického VP dim n všech uspořádaných n -tic $\mathbf{R}$ čísel)
 $\forall \vec{x} \in V: \varphi(\vec{x}) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, kde $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ jsou souřadnice vektoru $\vec{x}$ v bázi (1).

Toto zobrazení je bijektivní a navíc má následující 2 vlastnosti:

1. $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V: \varphi(\vec{u} + \vec{v}) = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v})$
2. $\forall \vec{u} \in V, \forall p \in \mathbf{R}: \varphi(p \cdot \vec{u}) = p \cdot \varphi(\vec{u})$

Def.: Zobrazení φ s vlastnostmi 1. a 2. z předchozí poznámky nazýváme izomorfní zobrazení V_n na $\mathbf{R}^{(n)}$.

Def.: Necht' V_1, V_2 jsou 2 vektorové prostory takové, že mezi nimi existuje izomorfní zobrazení $\varphi: V_1 \rightarrow V_2$, pak říkáme, že vektorové prostory V_1, V_2 jsou vzájemně izomorfní a píšeme $V_1 \cong V_2$.

V.7.2.: Platí $V_1 \cong V_2 \Leftrightarrow \dim V_1 = \dim V_2$

Pozn.: Zatím jsme pracovali se třemi základními typy VP:

2 geometrické modely (VP orientovaných úseček, VP volných vektorů) a 1 aritmetický prostor $\mathbf{R}^{(n)}$.

Z předchozího však jasně plyne, že tyto typy VP, jestliže mají stejnou dim, jsou vzájemně izomorfní, tedy $U_1 \cong V_1 \cong \mathbf{R}^{(1)}$, $U_2 \cong V_2 \cong \mathbf{R}^{(2)}$, ...

Tedy pro řešení příkladů je jedno, s jakým VP dané dimenze pracujeme.

Souřadnice bodu

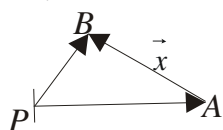
Def.: Necht' $P \in E_3$ je lib. bod. Necht' $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ je lib. báze VP volných vektorů V_3 . Pak uspořádanou čtveřici $(P, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ nazýváme afinní soustavou souřadnic v E_3 , bod P její počátek.

Jsou-li body $X, Y, Z \in E_3$ takové, že reprezentant vektoru $\vec{PX} \in \vec{e}_1$, $\vec{PY} \in \vec{e}_2$, $\vec{PZ} \in \vec{e}_3$, pak přímky $\vec{PX}, \vec{PY}, \vec{PZ}$ nazýváme souřadnými osami.

Je-li $A \in E_3$ lib. bod takový, že $\vec{PA} = a_1 \cdot \vec{e}_1 + a_2 \cdot \vec{e}_2 + a_3 \cdot \vec{e}_3$, pak uspořádanou trojici $[a_1, a_2, a_3]$ nazýváme souřadnicemi bodu A v dané afinní soustavě souřadnic (ASS) a píšeme $A = [a_1, a_2, a_3]$ nebo $A[a_1, a_2, a_3]$.

Vektor $\vec{PA}$ nazýváme průvodič (polohový vektor, radius vektor) bodu A.

V.7.3.: Necht' v E_3 je dána ASS. Necht' $A, B \in E_3$ jsou body a $\vec{x} \subseteq V_3$ je vektor takový, že $\vec{AB} \in \vec{x}$. Pak pro souřadnice $A = [a_1, a_2, a_3]$, $B = [b_1, b_2, b_3]$, $\vec{x}(x_1, x_2, x_3)$ platí $x_i = b_i - a_i, i \in \{1, 2, 3\}$



Pozn.: a) Souřadnice bodu P jsou $P = [0, 0, 0]$.

b) Analogicky se definují souřadnice bodů a vektorů v E_2 , resp. E_1 .

Def.: Necht' $P \in E_3$ je bod a $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ je taková báze V_3 , že platí :

Jsou-li $X, Y, Z \in E_3$ takové body, že $\vec{PX} \in \vec{e}_1$, $\vec{PY} \in \vec{e}_2$, $\vec{PZ} \in \vec{e}_3$, souřadné osy

$\vec{PX}, \vec{PY}, \vec{PZ}$ jsou navzájem $\perp$ a $|\vec{PX}| = |\vec{PY}| = |\vec{PZ}| = 1$, báze je ortonormální, pak

uspořádanou čtveřici $(P, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ nazýváme kartézskou soustavou souřadnic (KSS).

Def.: Velikostí vektoru $\vec{AB} = \vec{x}$ (resp. $\vec{AB} \in \vec{x}$) rozumíme délku úsečky AB . Zapisujeme $|\vec{x}| = |\vec{AB}| = |AB|$. Vektor o velikosti 1 nazýváme jednotkovým vektorem.

V.7.4.: Necht' $(P, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ je KSS. Necht' $\vec{x} \subseteq V_3$ je vektor, $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Pak pro velikost vektoru $\vec{x}$ platí $|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

Pozn.: a) Velikost vektoru nezávisí na jeho umístění

b) Je-li $\vec{AB} \in \vec{x}, A[a_1, a_2, a_3], B[b_1, b_2, b_3]$, pak $|\vec{x}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$

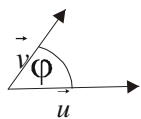
c) Pro bázevé vektory $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ KSS platí $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3| = 1$

§8. Skalární součin

Def.: Necht' $\vec{u}, \vec{v} \in U$ (resp. $\subseteq V$) jsou 2 vektory v geometrickém modelu VP. Pak skalárním součinem vektorů $\vec{u}, \vec{v}$ nazýváme reálné číslo označené $\vec{u} \cdot \vec{v}$ (nebo $(\vec{u}, \vec{v})$) a definované takto:

1. $\vec{u} = \vec{o} \vee \vec{v} = \vec{o} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
2. $\vec{u} \neq \vec{o} \wedge \vec{v} \neq \vec{o} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \varphi$, kde φ je konvexní úhel, který svírají vektory $\vec{u}, \vec{v}$.

Pozn.: Pro úhel vektorů $\vec{u}, \vec{v}$ platí:



- a) φ je neorientovaný
- b) $0 \leq \varphi \leq \pi$ přičemž $\varphi = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \uparrow \uparrow \vec{v}$ (souhlasně orientované)
 $\varphi = \pi \Leftrightarrow \vec{u} \downarrow \uparrow \vec{v}$ (nesouhlasně orientované).

Pozn.!: Skalární součin je zobrazení $U \times U \rightarrow R$ ($V \times V \rightarrow R$), které má následující vlastnosti:

$\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in U$ (resp. V), $\forall p \in R$:

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
2. $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$
3. $(p \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v} = p \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v})$
4. $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$, přičemž $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{o}$

Uvedené čtyři vlastnosti se v abstraktních VP používají k definici skalárního součinu a VP s takto definovaným skalárním součinem se nazývá Eukleidovský VP. Pak se dá ukázat, že v geometrickém modelu může být skalární součin definován

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \varphi.$$

Def.: Necht' $\vec{u}, \vec{v} \in V$ jsou vektory. Řekneme, že vektory $\vec{u}, \vec{v}$ jsou kolmé (ortogonální), právě když $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Zapisujeme $\vec{u} \perp \vec{v}$ ($\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$).

Pozn.: 1. $\vec{u} = \vec{o} \vee \vec{v} = \vec{o} \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$

$$2. \vec{u} \neq \vec{o} \wedge \vec{v} \neq \vec{o} \Rightarrow \left(\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} \right)$$

Def.: Řekneme, že množina (resp. posloupnost, resp. báze) vektorů $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n)$ vektorového prostoru V je ortogonální, právě když $\vec{u}_i \perp \vec{u}_j$ pro $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, i \neq j$.

Pozn.: a) Jestliže posloupnost vektorů má 1 vektor, je definitoricky ortogonální.
b) Každá ortogonální posloupnost nenulových vektorů je lineárně nezávislá.
c) V každém netriviálním vektorovém prostoru konečné dimenze lze zkonstruovat ortogonální bázi – viz následující věta a její důkaz.

V.8.1.: Necht' $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ je lib. konečná posloupnost vektorů vektorového prostoru V , která je systémem generátorů, pak ve V existuje ortogonální posloupnost vektorů $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$, která je rovněž systémem generátorů, tzn. platí $\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n \rangle = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n \rangle$

[Dk.!: Nazývá se Gramm-Schmidtův ortogonalizační proces:

Matematickou indukcí:

$$1. \vec{e}_1 = \vec{u}_1$$

2. Předpokládáme, že věta platí pro indexy $1, 2, \dots, r-1 < n \Rightarrow$

$$\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{r-1} \rangle = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_{r-1} \rangle$$

$\vec{e}_r$ volíme tak, aby byl lineární kombinací předchozích vektorů a vektoru

$$\vec{u}_r \Rightarrow \vec{e}_r = p_1 \cdot \vec{e}_1 + p_2 \cdot \vec{e}_2 + \dots + p_{r-1} \cdot \vec{e}_{r-1} + \vec{u}_r \quad (1)$$

Požadujeme, aby $\vec{e}_r \perp \vec{e}_1 \Rightarrow \vec{e}_r \cdot \vec{e}_1 = 0$

$$\vec{e}_r \perp \vec{e}_2 \Rightarrow \vec{e}_r \cdot \vec{e}_2 = 0$$

$\dots$

$$\vec{e}_r \perp \vec{e}_{r-1} \Rightarrow \vec{e}_r \cdot \vec{e}_{r-1} = 0$$

Dosazením do (1) a násobením (1) vektorem $\vec{e}_1$ dostáváme:

$$\underbrace{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_r}_{=0} = p_1 \cdot \underbrace{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1}_{=1} + \underbrace{p_2 \cdot \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1}_{=0} + \dots + \underbrace{p_{r-1} \cdot \vec{e}_{r-1} \cdot \vec{e}_1}_{=0} + \vec{u}_r \cdot \vec{e}_1 \Rightarrow p_1 = -\frac{\vec{u}_r \cdot \vec{e}_1}{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1}$$

Analogicky násobením (1) vektorem $\vec{e}_2$ dostáváme $p_2 = -\frac{\vec{u}_r \cdot \vec{e}_2}{\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2}$.

$$\text{Tedy obecně } p_i = -\frac{\vec{u}_r \cdot \vec{e}_i}{\vec{e}_i \cdot \vec{e}_i} \quad (2)$$

Ze vztahů (1) a (2) plyne $\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_r \rangle = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_r \rangle$.

Def.: Řekneme, že množina (resp. posloupnost, resp. báze) vektorů $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n)$ vektorového prostoru V je ortonormální, právě když je ortogonální a $|\vec{u}_i| = 1$ pro $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Pozn.: a) Necht' $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ je ortonormální báze, pak platí: $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_i = 1$, $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0$ pro $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $i \neq j$.

b) V každém netriviálním vektorovém prostoru konečné dimenze lze zkonstruovat i ortonormální bázi, neboť z každého nenulového vektoru $\vec{u}$, jestliže není jednotkový, lze vydělením tohoto vektoru jeho velikostí dostat jednotkový vektor, tedy $\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$.

V.8.2.: Necht' $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ a $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ jsou vektory vektorového prostoru V dány souřadnicemi v ortonormální bázi, pak platí:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + \dots + u_n \cdot v_n = \sum_{i=1}^n u_i \cdot v_i$$

Pozn.: Vztahem $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + \dots + u_n \cdot v_n$ se definuje skalární součin v aritmetickém vektorovém prostoru.

V.8.3.: Schwarzova-Cauchyova-Buňakovského nerovnost:

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in V: |\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|, \text{ přičemž rovnost nastane } \Leftrightarrow \vec{u} \text{ a } \vec{v} \text{ jsou lineárně závislé}$$

Pozn.: Protože v aritmetickém vektorovém prostoru můžeme určit skalární součin podle V.8.2., užívá se definiční vztah skalárního součinu pro určení úhlu sevřeného dvěma

$$\text{vektory: } \forall \vec{u}, \vec{v} \in V, \vec{u} \neq \vec{o}, \vec{v} \neq \vec{o}: \cos \varphi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} \wedge \varphi \in \langle 0, \pi \rangle$$

§9. Vektorový součin

Def.: Necht' $\vec{u}, \vec{v}$ jsou dva vektory vektorového prostoru V_3 . Pak vektorovým součinem vektorů $\vec{u}, \vec{v}$ (v tomto pořadí) nazýváme vektor $\vec{w}$ označený $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ a definovaný takto:

1. $\vec{u}, \vec{v}$ jsou lineárně závislé $\Rightarrow \vec{u} \times \vec{v} = \vec{o}$
2. $\vec{u}, \vec{v}$ jsou lineárně nezávislé $\Rightarrow$
 - a) $|\vec{w}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin \varphi$, kde φ je konvexní úhel, který svírají vektory $\vec{u}, \vec{v}$
 - b) $\vec{w} \perp \vec{u} \wedge \vec{w} \perp \vec{v}$
 - c) Uspořádaná trojice $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ je kladně orientovaná (tyto vektory vytvářejí pravotočivou bázi); kladnou orientaci určíme pomocí pravidla pravé ruky, položíme-li pravou ruku tak, aby vektory $\vec{u}, \vec{v}$ vstupovaly do dlaně směrem k prstům od $\vec{u}$ k $\vec{v}$, vztyčený palec ukazuje směr vektoru $\vec{w}$.

Pozn.: Vektorový součin je zobrazení $x: V \times V \rightarrow V$, které má následující vlastnosti:

$$\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V_3, \forall p \in \mathbb{R}:$$

$$1. \vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$$

$$2. (\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w} \wedge \vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$$

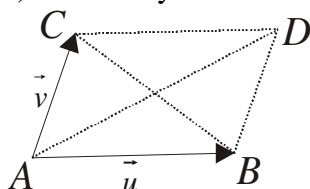
$$3. (p \cdot \vec{u}) \times \vec{v} = p \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{u} \times (p \cdot \vec{v})$$

Vektorový součin je distributivní, ale není komutativní ani asociativní.

V.9.1.: Necht' $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ a $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ jsou vektory vektorového prostoru V_3 dány souřadnicemi v ortonormální kladně orientované bázi, pak pro souřadnice vektoru $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ platí:

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} u_3 & v_3 \\ u_1 & v_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}$$

Pozn.: a) Vektorový součin se využívá pro určení obsahu rovnoběžníku, resp. trojúhelníku:



Necht' $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, potom platí: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |\vec{u} \times \vec{v}|$, $S_{ABDC} = |\vec{u} \times \vec{v}|$ (bod D je obrazem bodu A ve středové souměrnosti se středem úsečky BC)

b) Analogicky pro V rovnoběžnostěnu $ABCDEFGH$ určeného bázovými vektory:

Necht' $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$, potom platí: $V = |(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}|$.

Pozn.: a) $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$ se nazývá smíšený součin vektorů $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

$$\text{Platí: } (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = (\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{u} = (\vec{w} \times \vec{u}) \cdot \vec{v} = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}$$

vnější součin vektorů $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$

((b) Dále existuje dvojný součin vektorů $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$: $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \cdot \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w}) \cdot \vec{u}$.))